

# O bolo de Pitágoras



*Selo grego de 1955*

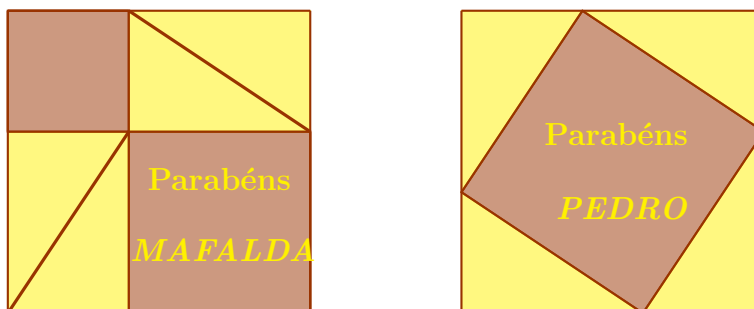
Por mais antigo, repisado e tradicional que seja o assunto que estamos a abordar convém sempre procurar novas perspectivas, não só para tornar as aulas mais atraentes mas também para nos dar um pouco mais de entusiasmo, quebrando com a monotonia de repetir todos os anos as mesmas abordagens. Até mesmo um assunto ‘paleontológico’ como o teorema de Pitágoras admite abordagens diferentes e algumas variações, a julgar pela quantidade de demonstrações que este teorema admite. Um dos objetivos específicos dos programas de Matemática é *demonstrar o teorema de Pitágoras*. Passo a relatar uma das possíveis abordagens (que costumo utilizar) para introduzir o teorema mais famoso da história da matemática<sup>1</sup>.

A minha filha Mafalda e o seu primo Pedro nasceram em dias consecutivos do mês de maio. Na maior parte das vezes costumam festejar o aniversário no mesmo dia, pois torna-se mais fácil juntar a família. Muitas vezes sou eu que faço a encomenda do bolo de aniversário. Uma vez lembrei-me de encomendar dois bolos, aparentemente diferentes, mas ambos de bases quadradas e do mesmo tamanho. Deixei uma nota para o pasteleiro colocar cobertura de chocolate na parte mais escura, como mostram as figuras seguintes.

Quando me dirigi à pastelaria para levantar os bolos fiquei um pouco surpreso quando o funcionário me apresentou a conta: o bolo da Mafalda custava mais um euro. Perguntei porquê: — *Além de ter dado mais trabalho, também gastou mais chocolate.*

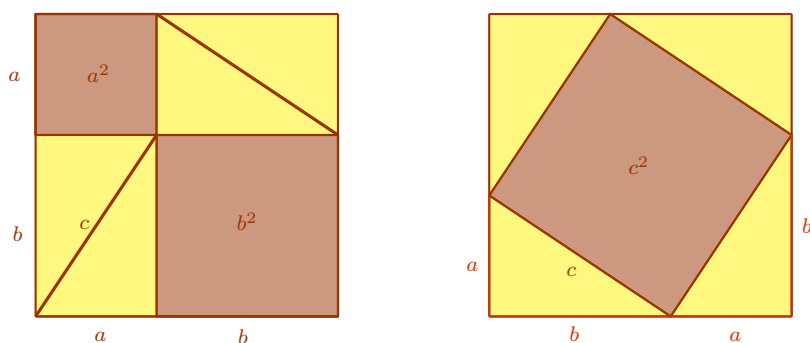
<sup>1</sup>Para a comunidade matemática, o teorema mais famoso da matemática é o **Último Teorema de Fermat** (UTF), que foi dada a conhecer em 1670 por uma anotação do francês Pierre Fermat na margem do livro *Arithmetica*, de Diofanto de Alexandria (séc. III dC). No entanto, o teorema de Pitágoras é, indubitavelmente, o teorema mais famoso da matemática elementar. O UTF afirma que a equação  $x^n + y^n = z^n$  não tem soluções naturais para qualquer potência  $n > 2$ , estando, portanto, relacionado com o teorema de Pitágoras. Foi a resistência por mais de três séculos (só foi demonstrado em 1994 pelo inglês Andrew Wiles) a qualquer demonstração que tornou o UTF tão famoso.

Fiquei a pensar, será que o bolo da Mafalda gastou mais chocolate? Esta é a questão fundamental. Antes de avançar, sugiro ao leitor que observe atentamente as duas figuras.



Há alunos que perguntam quais são as medidas dos lados dos triângulos. Nesse caso, acrescento que de uma figura para a outra existiam quatro pares de triângulos congruentes. A resposta à questão formulada torna-se óbvia: como os bolos têm o mesmo tamanho, a área dos dois quadrados pequenos é igual à área do quadrado maior, portanto, gastaram ambos a mesma quantidade de chocolate.

Só depois de todos chegarem a esta conclusão surge a necessidade de formalizar a resposta. Comecemos por identificar por  $a$ ,  $b$  e  $c$  as medidas dos lados de cada triângulo. Esta identificação esclarece que os quadrados têm lados de medidas  $a$ ,  $b$  e  $c$ , do mais pequeno para o maior, como mostram as figuras:



Ora, sabíamos que os dois quadrados iniciais eram equivalentes. Vemos também que ambos têm área  $(a + b) \times (a + b)$ . Como a área de um quadrado é igual ao quadrado da medida do seu lado, e designando por  $A$  a área de cada triângulo, podemos decompor cada figura tendo em conta a área dos polígonos que as formam. Assim, surge a igualdade

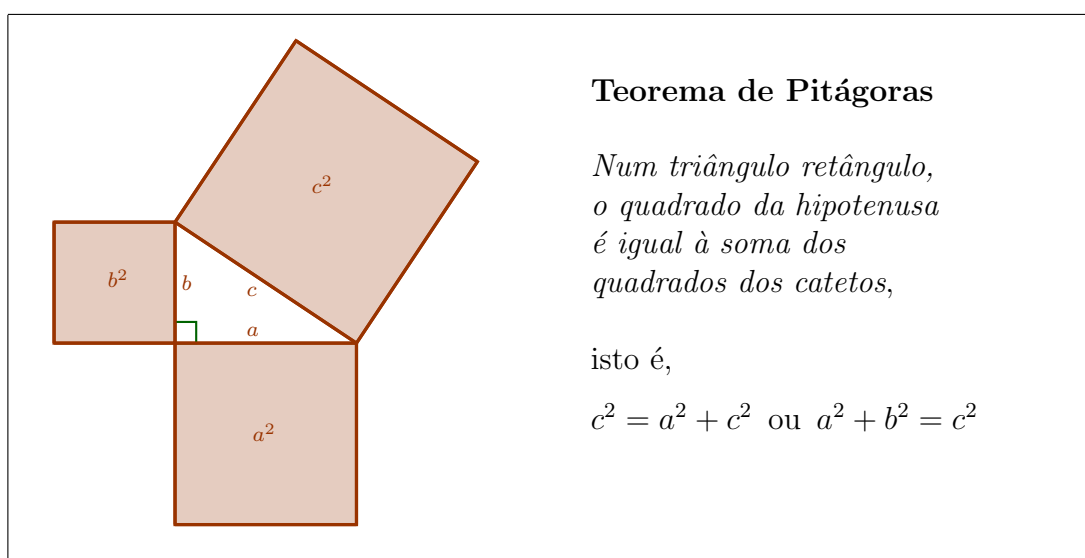
$$4 \times A + a^2 + b^2 = 4 \times A + c^2.$$

Eliminando as parcelas iguais,  $4A$ , em ambos os membros, vem

$$a^2 + b^2 = c^2$$

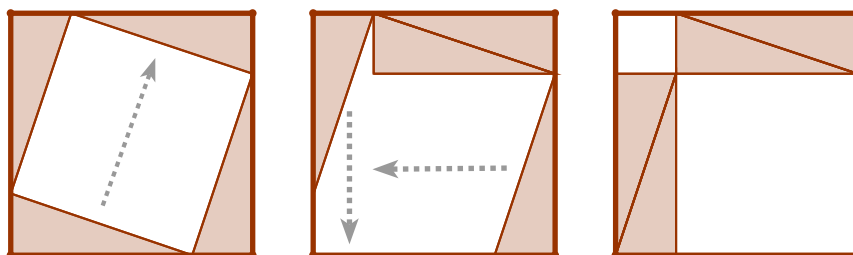
Mas as expressões  $a^2$ ,  $b^2$  e  $c^2$  representam precisamente as áreas dos três quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo, portanto a igualdade anterior mostra que ***a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos é igual à área do quadrado construído sobre a hipotenusa***, tal como sugere o rearranjo da figura seguinte.

Esta descrição baseia-se na demonstração que Pitágoras terá apresentado para o teorema que ficou conhecido pelo seu nome<sup>2</sup>. Trata-se de uma demonstração relativamente simples, que resulta da decomposição de um quadrado de duas formas diferentes, podendo facilmente ser exemplificada com um puzzle construído pelos alunos ou pelo professor. Mais formalmente:



Para tornar esta situação mais prática (e mais intuitiva), costumo levar para a aula um pequeno puzzle (caixa com quatro triângulos retângulos congruentes) que são facilmente rearranjados de duas formas diferentes de modo a exemplificar a situação dos bolos, tal como sugerem as imagens seguintes. Transladando os triângulos, dentro da caixa, facilmente se conclui que a área livre na figura da direita (dois quadrados cujos lados são os catetos do triângulo retângulo) é igual à área livre na figura da esquerda (quadrado cujo lado é a hipotenusa). Portanto, como se trata da mesma caixa e dos mesmos quatro triângulos retângulos, concluímos que: *a área do quadrado da esquerda é igual à soma da área dos dois quadrados da direita*.

<sup>2</sup>Têm sido feitas várias suposições sobre a demonstração que Pitágoras terá apresentado, mas, como refere Eves em *Introdução à História da Matemática*, terá sido uma demonstração por decomposição idêntica à apresentada.



Apenas um pequeno pormenor que poderá ter passado despercebido a um leitor menos atento. Como sabemos que a área livre na caixa da esquerda é um quadrado? Sabemos que tem os lados todos iguais (hipotenusa do triângulo retângulo) pois os quatro triângulos são congruentes, mas isto não é suficiente para ser um quadrado. Repare que em cada vértice desse quadrilátero se encontram três ângulos, o ângulo interno deste quadrilátero e os dois ângulos agudos do triângulo retângulo. Ora, os três ângulos formam um ângulo raso e os dois ângulos agudos do triângulo retângulo são complementares, portanto o ângulo interno do quadrilátero é reto. Assim, a área livre interior é um quadrado.

A história do bolo é fictícia, mas os alunos acharam-na muito real, a julgar pelo entusiasmo e pela forma como tentaram responder à questão colocada. Só no final lhes disse que foi uma situação que adaptei para introduzir o teorema de Pitágoras de uma forma mais prática. Geralmente, os alunos ficam esclarecidos de que os dois bolos são mesmo equivalentes (isto é dito no início), apesar de inicialmente não parecerem, e houve até quem afirmasse: — *Foi enganado, professor!*, ao que respondi: — *O pasteleiro é que está enganado ou não conhece o teorema de Pitágoras.*

Embora o teorema de Pitágoras se refira às áreas dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo, a sua maior aplicação prende-se com o cálculo da medida de um dos lados do triângulo quando se conhecem os outros dois, através da resolução de uma equação do 2.º grau. Geralmente, começa-se por aplicar o teorema para calcular a medida da hipotenusa, por ser ligeiramente mais simples, passando-se de seguida ao cálculo de um cateto. Apesar de o teorema ser único, há alunos que fazem alguma confusão, considerando que existe um teorema para calcular a hipotenusa e outro para calcular o cateto. Para minimizar esta dificuldade costumo alertar os alunos para o facto de os catetos começarem sempre juntos (quer dizer, no mesmo membro da equação), tanto para calcular um cateto ou a hipotenusa, e começar pela parte que envolve a incógnita (medida desconhecida) facilita a resolução da equação.