

### Teorema de Comparação de Sucessões (TCS)

Sejam  $(u_n)$  e  $(v_n)$  duas sucessões:

- Se  $(u_n)$  e  $(v_n)$  são convergentes e, a partir de certa ordem,  $u_n \leq v_n$ , então  $\lim u_n \leq \lim v_n$
- Se  $\lim u_n = +\infty$  e, a partir de certa ordem,  $u_n \leq v_n$ , então  $\lim v_n = +\infty$
- Se  $\lim v_n = -\infty$  e, a partir de certa ordem,  $u_n \leq v_n$ , então  $\lim u_n = -\infty$

### Teorema das Sucessões Enquadradas (TSE)

Sejam  $(u_n)$  e  $(v_n)$  duas sucessões convergentes para o mesmo limite  $a \in \mathbb{R}$ :

- Se  $(w_n)$  é outra sucessão tal que, a partir de certa ordem,  $v_n \leq w_n \leq u_n$  então  $\lim w_n = a$

### Teorema de Comparação de Funções (TCF)

Sejam  $f$  e  $g$  duas funções reais de variável real de domínio  $D$  e  $a \in \mathbb{R}$  um ponto aderente a  $D$ :

- Se para todo o  $x \in D$ ,  $f(x) \leq g(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ , então  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$
- Se para todo o  $x \in D$ ,  $f(x) \leq g(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ , então  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

### Teorema das Funções Enquadradas (TFE)

Sejam  $f$ ,  $g$  e  $h$  funções reais de variável real de domínio  $D$  e  $a \in \mathbb{R}$  um ponto aderente a  $D$ :

- Se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = b \in \mathbb{R}$  e, para todo o  $x \in D$ ,  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  então  
$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$$

**Nota:** Os teoremas para funções também são válidos quando  $x \rightarrow \pm\infty$ ,  $x \rightarrow a^-$  e  $x \rightarrow a^+$

## Teorema de Bolzano-Cauchy (TBC)

Seja  $f$  uma função real de variável real contínua num intervalo  $[a, b] \subset D_f$ .

Para qualquer número real  $k$  compreendido entre  $f(a)$  e  $f(b)$  existe pelo menos um número  $c \in ]a, b[$  tal que  $f(c) = k$ .

## Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy (CTBC)

Se  $f$  é contínua num intervalo  $[a, b] \subset D_f$  e muda de sinal nesse intervalo, isto é,  $f(a) \times f(b) < 0$ , então  $\exists c \in ]a, b[ : f(c) = 0$ , ou seja,  $f$  tem pelo menos um zero em  $]a, b[$ .

## Teorema de Weierstrass (TW)

Toda a função contínua num intervalo fechado, admite nesse intervalo um máximo e um mínimo absolutos.

## Teorema de Lagrange (TL)

Seja  $f$  uma função real de variável real contínua num intervalo fechado  $[a, b] \subset D_f$ .

Se  $f$  é derivável em  $]a, b[$  então existe pelo menos um  $c \in ]a, b[$  tal que  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

## Definição de Derivada

Seja  $f$  uma função real de variável real e  $a$  um ponto do seu domínio.

Chama-se **derivada** de  $f$  no ponto  $a$ , e representa-se por  $f'(a)$ , ao seguinte limite, se existir e for finito:  $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  ou  $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$

## Teorema (derivabilidade $\Rightarrow$ continuidade)

Toda a função derivável num ponto de abscissa  $a$  do seu domínio é contínua nesse ponto.

**Nota:** O recíproco não é verdadeiro, isto é, uma função pode ser contínua e não ser derivável.